

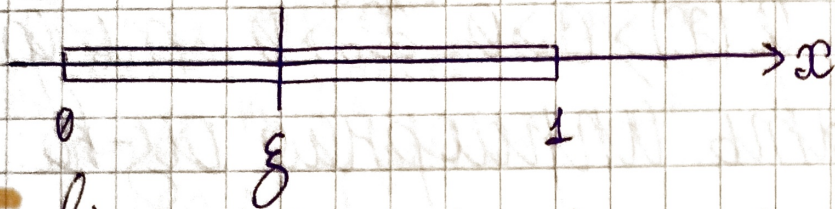
Л.5. Ур-я с разрывными коэфф-тами 12/05

Снова $\neq$ ур-е

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

— Ф-ция $f(x)$ имеет разрыв в некот.
 $\tau, \tau \in (0, 1)$

Какая ситуация возникает, например,
когда данное ур-е описывает распределение
температуры в неоднород стержне:
коэфф-т теплопровод-ти в т. τ испыты-
вает разрыв



$$\lim_{x \rightarrow \xi-0} p(x) = p(\xi-0) \neq p(\xi+0) = \lim_{x \rightarrow \xi+0} p(x)$$

1) If $u(x)$ — температур-ра (например), то она должна быть непр. в т. ξ : $u(\xi-0) = u(\xi+0)$

2) Величина $pu'(x)$ — (поток) — также должна быть непр.: $p(\xi-0)u'(\xi-0) = p(\xi+0)u'(\xi+0)$

Эти 2 усл-я сопряжения следуют из "физики" описываемого процесса.

! Зам.1 Вообще говоря, ф-ции $q(x)$ и $f(x)$ также могут иметь разрывы.

! Зам.2 Все рассуждения в этом пункте имеют смысл, if точек разрыва конечное число.

! Зам.3 Точки разрыва целесообразно помещать в узлы сетки. Вообще говоря, это приводит к необходимости исп-ть неравномерн. сетки

Построение разност. схемы проведем для

простоты, в случае, когда в т.з имеют
 разрыв ф-ции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, причем раз-
 рыв $\pm$ рода

Разрыв помещим в узел равномерн.
 сетки $[x = x_{i0}]$

① Из Q_{10} усл-я сопряжения $\Rightarrow [u(x-0) =$
 $= u(x+0) = u_{i0}]$

② $\neq$ отпр-к $[x_{i0} - \frac{h}{2}, x_{i0} + \frac{h}{2}]$. Проинтегри-
 рuem по нему ур-е:

$$\int_{x_{i0}-h/2}^{x_{i0}+h/2} -(pu')' dx = \int_{x_{i0}-h/2}^{x_{i0}+h/2} (f(x) - q(x)u(x)) dx, \text{ из}$$

$$\text{леммы} \Rightarrow \int_{x_{i0}}^{x_{i0}+h/2} -(pu')' dx + \int_{x_{i0}-h/2}^{x_{i0}} -(pu')' dx = \int_{x_{i0}-h/2}^{x_{i0}+h/2} (f(x) -$$

$$- q(x)u(x)) dx$$

Обозначая, как и ранее, $x_{i0} \pm \frac{h}{2} = x_{i0 \pm 1/2}$,
 получим: $-(pu')|_{x_{i0+1/2}} + (pu')|_{x_{i0}} - (pu')|_{x_{i0}} + (pu')|_{x_{i0-1/2}} =$
 $= \int_{x_{i0-1/2}}^{x_{i0+1/2}} (f(x) - q(x)u(x)) dx$
 $= 0$ (в силу усл. сопряж. 2))

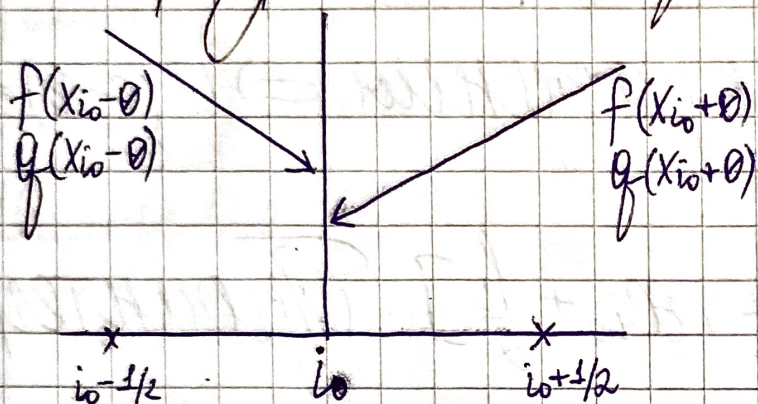
Окончательно:

$$-p(x_{i0+1/2})u'(x_{i0+1/2}) + p(x_{i0-1/2})u'(x_{i0-1/2}) = \int_{x_{i0-1/2}}^{x_{i0+1/2}} [f(x) - q(x)u(x)] dx$$

что по форме очень похоже на случай непр-
 $p(x)$

Положим:
$$\left. \begin{aligned} u'(x_{i_0+1/2}) &\sim \frac{y_{i_0+1} - y_{i_0}}{h}, \\ u'(x_{i_0-1/2}) &\sim \frac{y_{i_0} - y_{i_0-1}}{h}, \end{aligned} \right\}$$

а f -н в прав. части аппроксимируем с учетом разрывности $g(x)$ и $f(x)$.



$$\int_{x_{i_0-1/2}}^{x_{i_0+1/2}} [f(x) - g(x)u(x)] dx \approx h \left[\frac{f(x_{i_0+0}) + f(x_{i_0-0})}{2} + \frac{g(x_{i_0+0}) + g(x_{i_0-0})}{2} u(x_{i_0}) \right]$$

Тем самым, получаем схему, по форме совпадающую с непр. случаем:

$$-(a_i y_x)_x + d_i y_i = \varphi_i,$$

$$a_{i+1} = p_{i+1/2}, \quad a_i = p_{i-1/2},$$

$$d_i = \frac{1}{2} (g(x_{i+0}) + g(x_{i-0})),$$

$$\varphi_i = \frac{1}{2} (f(x_{i+0}) + f(x_{i-0}))$$

А/непр. коэфф-тов она в точности совпадает с уже ранее полученной (П.3)

$\Rightarrow$, в точках непр-ти коэфф-тов построенная схема имеет $2m$ пор-к аппр-ции.

В т. разрыва погреш-ть аппр-ции имеет $1m$ пор-к: $\Phi_{10} = O(h)$, тем не менее, имеет место быть ∇ :

∇] ф-ция $p(x)$ — кус.-непр; $q(x), f(x)$ — непр, $u(x)$ имеет нп непр. производн. вне точек разрыва, тогда рассматриваемая схема сх-а с $2m$ пор-ком

Итак: схема в конечном числе точек может иметь $1m$ пор-к аппр-ции (вне этих точек — $2m$), а сх-та может иметь $2m$ пор-к

Л.6 Ур-е конвекции-диффузии

Ур-е конвекции-диффузии явл-ся обоб-щением ранее рассмотренного ур-я тепло-провод-ти и выглядит след. образом:

$-(p(x)u')' - r(x)u'(x) + q(x)u = f(x)$, где слагаемое $r(x)u'(x)$ описывает перенос

Аппроксимируем это слагаемое с $2m$ пор-ком:

$$U_i^1 \sim \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = \frac{1}{2} (y_{xi} + y_{\bar{x}i})$$

Т.о., разностн. схема принимает вид:

$$-(p_{i+1/2} y_{xi} - p_{i-1/2} y_{\bar{x}i}) + q_i y_i = f_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (*)$$

$$y_0 = g_0, \quad y_N = g_1$$

Данная схема (*) аппроксимирует эту краев. зад. д/уравнения конвекции-диффузии со 2-ым порядком при $u \in C^4[0, 1]$

Док-во 2-го порядка аппр-ции схемы д/уравнения теплопр-ти (Л.3) + Док-во 2го порядка аппр-ции д/центральной разностн. производной // ■

Если $p(x) \geq c_0 > 0$, $q(x) \geq c_1 > 0$, тогда при выполнении усл-я $\max_i \frac{r(x_i) h}{2c_0} \leq 1$ разностн. схема имеет! решение и верна оц-ка: $\|y\|_k \leq |g_0| + |g_1| + \frac{\|f\|_k}{c_1}$

Запишем схему в виде:

$$-(p_{i+1/2} y_{xi} - p_{i-1/2} y_{\bar{x}i}) \frac{1}{h} - \frac{r_i}{2} (y_{xi} + y_{\bar{x}i}) + q_i y_i = f_i$$

Перегруппируем слагаемые:

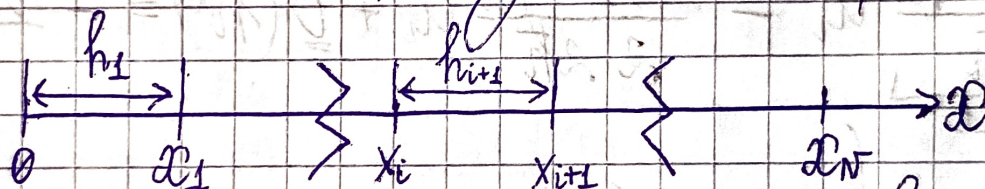
$$-\underbrace{(p_{i+1/2} \frac{1}{h} + \frac{r_i}{2})}_{\geq 0} y_{xi} + \underbrace{(p_{i-1/2} \frac{1}{h} - \frac{r_i}{2})}_{\geq 0} y_{\bar{x}i} + q_i y_i = f_i$$

В силу упр-я ∇ : $\max_i \frac{|r(x_i)|}{\alpha} \leq \frac{C_0}{h} \leq \frac{P(x_{j+1/2})}{h}$
 - скобки не отриц.

Далее док-во совпадает с док-вом основн. ∇ (П.1, П.6) ■

П.7. Неравномерные сетки

★ на отр-ке $[0, 1]$ неравномерн. сетку, т.е. такую, что $h_i \neq \text{const}$: $\omega_i = h_i x_i$: $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$, $x_{i+1} = x_i + h_{i+1}$, $i = 0, N-1$; $x_0 = 0$, тем самым, ω_i - произвольн. неравномер. сетка



Введем дополнит. обознач-я: $\bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$,

$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = y_{x_i}$ и ★ перейдем к аппр-ции y и x производных:

$$\textcircled{1} \frac{dy}{dx} \sim \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} = y_{x_i}$$

$$\sim \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} = y_{x_i}$$

$$\sim \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h_i} = y_{x_i}$$

Перейдем к аппр-ции y_{x_i} :

$$\begin{aligned}\psi_i &= u_i' - \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} = u_i' - \left[u_i + h_{i+1} u_i' + \frac{h_{i+1}^2}{2} u_i'' - u_i \right] \frac{1}{h_{i+1}} \\ &= u_i' - u_i' + \frac{h_{i+1}}{2} u_i'' = \underline{O}(h_{i+1})\end{aligned}$$

А) y_{xi} — погреш-ть 1го пор-ка. Аналогично, 1й пор-к аппр-ции имеет и y_{xi}
Погреш-ть аппр-ции y_{xi} :

$$\begin{aligned}\psi_i &= u_i' - \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h_i} = u_i' - \frac{1}{2h_i} \left[u_i + h_{i+1} u_i' + \frac{h_{i+1}^2}{2} u_i'' + \right. \\ &+ \underline{O}(h_{i+1}^3) - (u_i - h_i u_i' + \frac{h_i^2}{2} u_i'' + \underline{O}(h_i^3)) \Big] = u_i' - \\ &- \frac{h_{i+1} + h_i}{2h_i} u_i' - \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{2 \cdot 2h_i} u_i'' + \underline{O}(h^2) = - \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{4h_i} u_i'' + \underline{O}(h^2) \\ &= - \frac{h_{i+1} - h_i}{2} u_i'' + \underline{O}(h^2)\end{aligned}$$

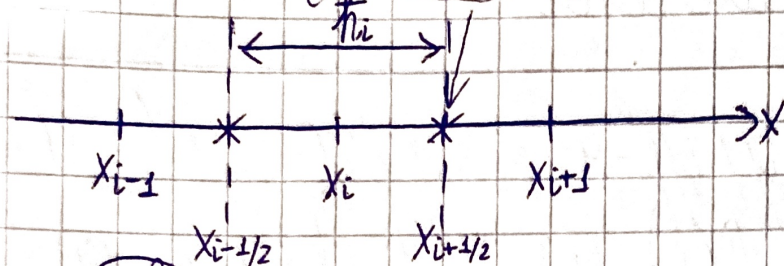
Как видно, погреш-ть аппр-ции будет иметь 1й пор-к, if $h_{i+1} \neq h_i$

Если самым, по сравнению со случаем равномерн. сетки, пор-к понижился на 1
 (If $h_{i+1} - h_i = \underline{O}(h)$)

Заметим, что if неравномер. сетка:
 $h_{i+1} - h_i = \underline{O}(h^2)$, то пор-к будет ам. Здесь под h подразумевается: $h = \max_i h_i$

② 2-я производная

$$\frac{d^2 u}{dx^2} \sim \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right) \frac{1}{h_i}$$



Погреш-ть аппр-ции:

$$\begin{aligned} \psi_i &= u_i'' - \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right] \frac{1}{h_i} = u_i'' - \left[u_i' + \frac{h_{i+1}}{2} u_i'' + \right. \\ &+ \frac{h_{i+1}^2}{6} u_i''' + \frac{h_{i+1}^3}{24} u_i^{(4)} - u_i' + \frac{h_i}{2} u_i'' - \frac{h_i^2}{6} u_i''' + \frac{h_i^3}{24} u_i^{(4)} \left. \right] \frac{1}{h_i} = \\ &= u_i'' - \left[\frac{h_{i+1} + h_i}{2h_i} u_i'' + \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{6h_i} u_i''' + \frac{h_{i+1}^3 + h_i^3}{24h_i} u_i^{(4)} + O(h^4) \right] = \\ &= - \frac{(h_{i+1} - h_i)}{3} u_i''' - \frac{(h_{i+1}^2 - h_{i+1}h_i + h_i^2)}{12} u_i^{(4)} + O(h^3) \end{aligned}$$

Итак:

- ① Вообще говоря, $\psi_i = O(h_{i+1} - h_i)$
- ② If $h_{i+1} - h_i = O(h) \Rightarrow \psi_i = O(h)$
- ③ If $h_{i+1} - h_i = O(h^2) \Rightarrow \psi_i = O(h^2)$

Обратим внимание на усл. (3). Сетки, удовлетворяющие этому усл-ю, часто называют квадратно-мерными: $h_{i+1} - h_i = c_i h_i^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{h_{i+1}}{h_i} = 1 + c_i h_i$

Практика показывает, что if $0 \leq \alpha \leq 0.1$, то "неравномерн-ть" сетки не сильно влияет на точность расчетов

Запишем схему д/ур-я теплопровод-ти:
 $-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x)$ на неравномерн. сетке:

$$-\left[p\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}\right) \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - p\left(x_i - \frac{h_i}{2}\right) \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right] + q_i y_i = f_i \text{ или}$$

$$-(p_{i-1/2} \bar{y}_x)' + q_i y_i = f_i \quad (*)$$

Кейс $\Rightarrow$ Из пред. выкладок, схема имеет по крайней мере 2-ой пер-к аппр-ции, $O(h)$, а if сетка квазиравномерная — то 2-й.

Д/этой схемы справедлива Л.

Л] $p \geq c_0 > 0$, $q \geq c > 0$, тогда реш-е $(*)$ $\exists$, ! и верна оц-ка: $\|y\|_C \leq |y_0| + |y_1| + \frac{1}{c} \|f\|_C$, где y_0, y_1 — краев. усл-я и краев. зад.

■ // Сов-во полностью совпадает с дек-вом Л д/равномер сетки ■

Тем самым, справедливы и все утв-я, следующие из этой Л и в случае неравномерной сетки.